(1) سلم تصحيح أسئلة مقرر ـ

نظرية المعادلات التفاضلية

سنة رابعة رياضيات تحليل/تطبيقي:

فصل أول 2016 / 2017 (13:2-2017)

السؤال الأول

لنوجد حل المعادلة

$$w' = z^2 + w^2 \quad (1)$$

المحقق للشرط

$$w = 1 \text{ عندما } z = 0 \quad (2)$$

حيث نفرض الحل على شكل (متسلسلة تايلور) الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad z_0 = 0$$

(3)

$$a_n = \frac{w^{(n)}(0)}{n!}$$

حيث هنا (2)

حيث المعامل ـ صيغة تايلور

المطلوب: الحل باستخدام صيغة تايلور المعامل (4)

حساب نحسب المعامل a_n حيث $n = 0, 1, 2, 3$

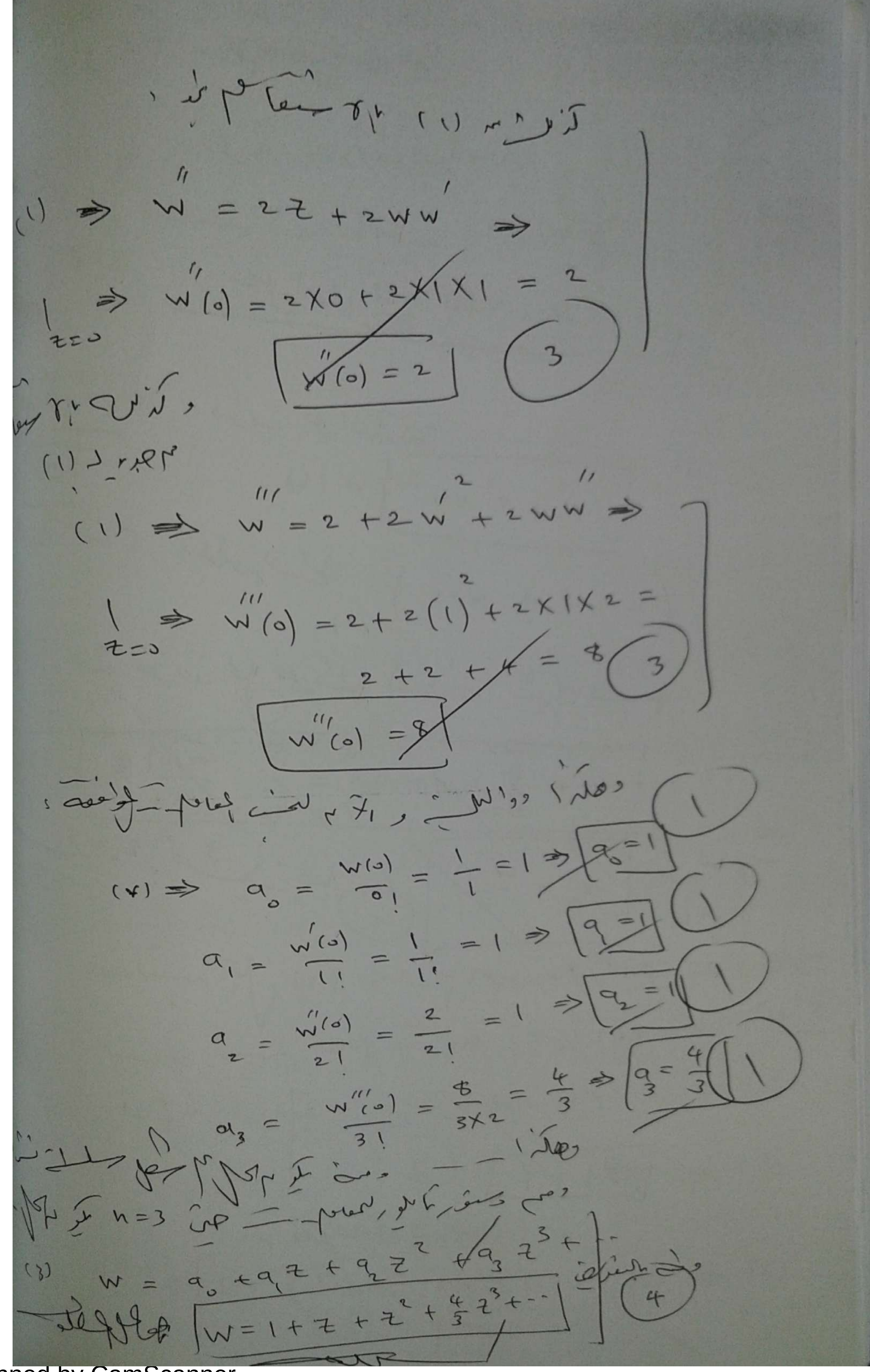
لدينا: من الشرط (2)

$$(2) \Rightarrow w(0) = 1$$ (3)

ومن نص المعادلة المعطاة (1) نجد:

$$(1) \Rightarrow w'(0) = (0)^2 + (w(0))^2 = 0 + (1)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$w'(0) = 1$$ (3)



كذلك باشتقاق (1) مرة ثانية نجد :

$$(1) \Rightarrow w'' = 2z + 2ww' \Rightarrow$$

$$\Big|_{z=0} \Rightarrow w''(0) = 2\times 0 + 2\times 1\times 1 = 2$$

$$\boxed{w''(0) = 2}$$

(3)

وكذلك نشتق مرة ثالثة المعادلة (1)

$$(1) \Rightarrow w''' = 2 + 2w'^2 + 2ww'' \Rightarrow$$

$$\Big|_{z=0} \Rightarrow w'''(0) = 2 + 2(1)^2 + 2\times 1\times 2 =$$

$$2 + 2 + 4 = 8$$

$$\boxed{w'''(0) = 8}$$

(3)

وهكذا ، وبالتعويض في (٢) لنحسب المعاملات الموجودة :

$$(٢) \Rightarrow a_0 = \frac{w(0)}{0!} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{a_0 = 1}$$ (1)

$$a_1 = \frac{w'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1 \Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$$ (1)

$$a_2 = \frac{w''(0)}{2!} = \frac{2}{2!} = 1 \Rightarrow \boxed{a_2 = 1}$$ (1)

$$a_3 = \frac{w'''(0)}{3!} = \frac{8}{3\times 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{a_3 = \frac{4}{3}}$$ (1)

وهكذا ـــ ومنه نكتب الحل ... ومن منشور تايلور المعامل ـــ حتى $n=3$ ...

$$(3) \quad w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

$$\boxed{w = 1 + z + z^2 + \frac{4}{3}z^3 + \cdots}$$

(4)

2

مثال: لدينا:

$$w'' + z w' - w = 0 \quad \text{---}(1)$$

$$[\, w(0) = 0 \;,\; w'(0) = 1 \,] \quad \text{---}(2)$$

لإيجاد الحل الموافق في جوار $(z=0)$ نقطة عادية للمعادلة التفاضلية (1) للشروط الابتدائية (2) نكون كما يلي:

نلاحظ: $p(z) = z$ ، $q(z) = -1$ في أمثال المعادلة (1) هي دوال تحليلية عند النقطة $z=0$ ، إذن النقطة $z=0$ هي نقطة عادية للمعادلة (1) وبالتالي يوجد حل تحليلي على الشكل:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{---}(3)$$

$z_0 = 0$ ، نشتق العلاقة (3) (على فرض أنها متقاربة بالنسبة لـ z ويكون:

$$(*) \Rightarrow \quad w' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

$$w'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

نعوض في المعادلة (1) ونكتب:

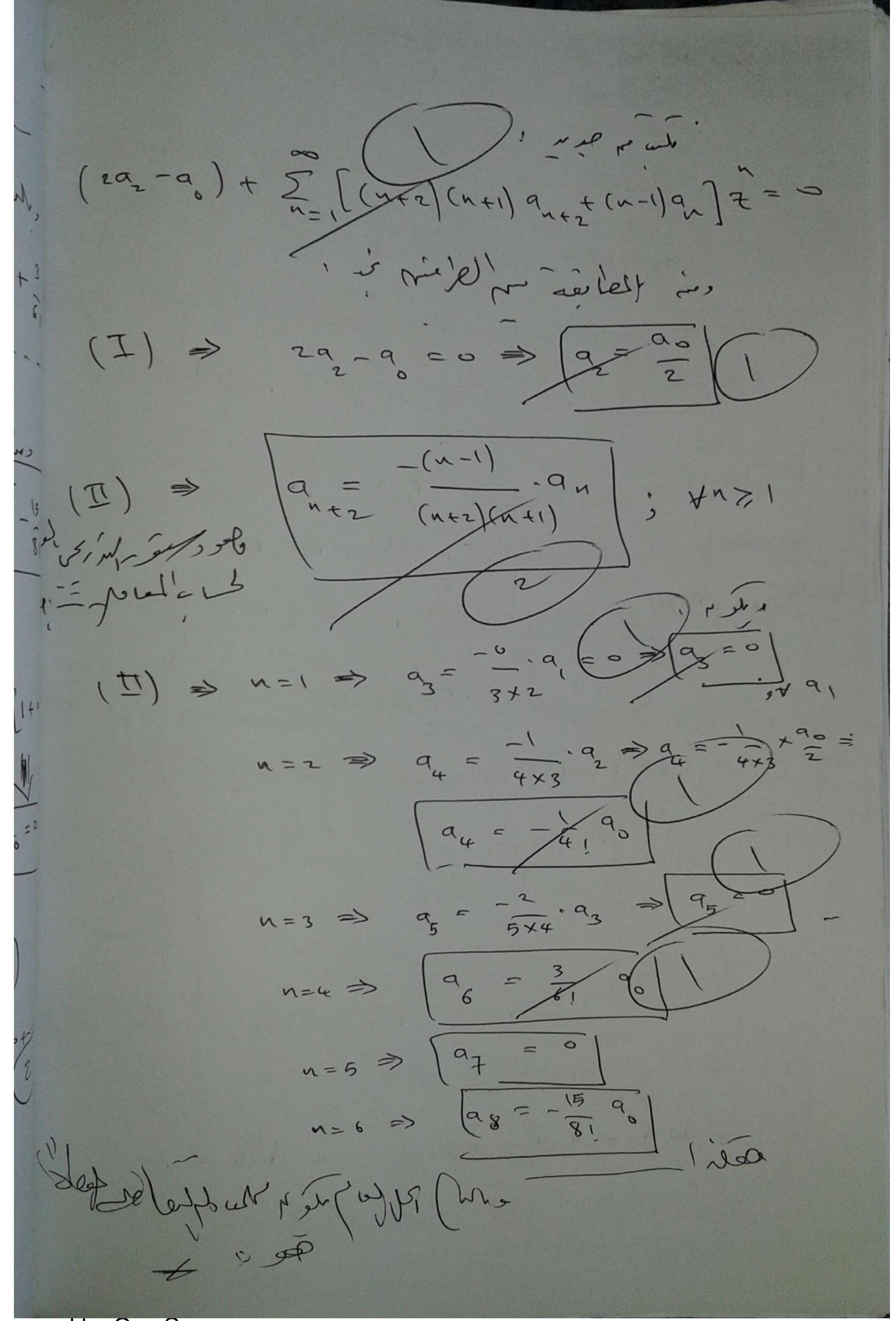
$$(1) \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} + z \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

نضع بدل n بـ $(n+2)$ في المجموع الأول ليكون:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

نأخذ $n=0$ من المجموع الأول والأخير

فقط وبعد إخراجه



نقسم من جديد:

$$(2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + (n-1) a_n \right] z^n = 0$$

ومن المطابقة بين الطرفين نجد:

$$(I) \Rightarrow 2a_2 - a_0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{a_0}{2}}$$

$$(II) \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{-(n-1)}{(n+2)(n+1)} \cdot a_n} \; ; \; \forall n \geq 1$$

نعود إلى العلاقة التراجعية لحساب المعاملات:

$$(II) \Rightarrow n=1 \Rightarrow a_3 = \frac{-0}{3 \times 2} \cdot a_1 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0} \; , \forall a_1$$

$$n=2 \Rightarrow a_4 = \frac{-1}{4 \times 3} \cdot a_2 \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{4 \times 3} \times \frac{a_0}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_4 = -\frac{1}{4!} a_0}$$

$$n=3 \Rightarrow a_5 = \frac{-2}{5 \times 4} \cdot a_3 \Rightarrow \boxed{a_5 = 0}$$

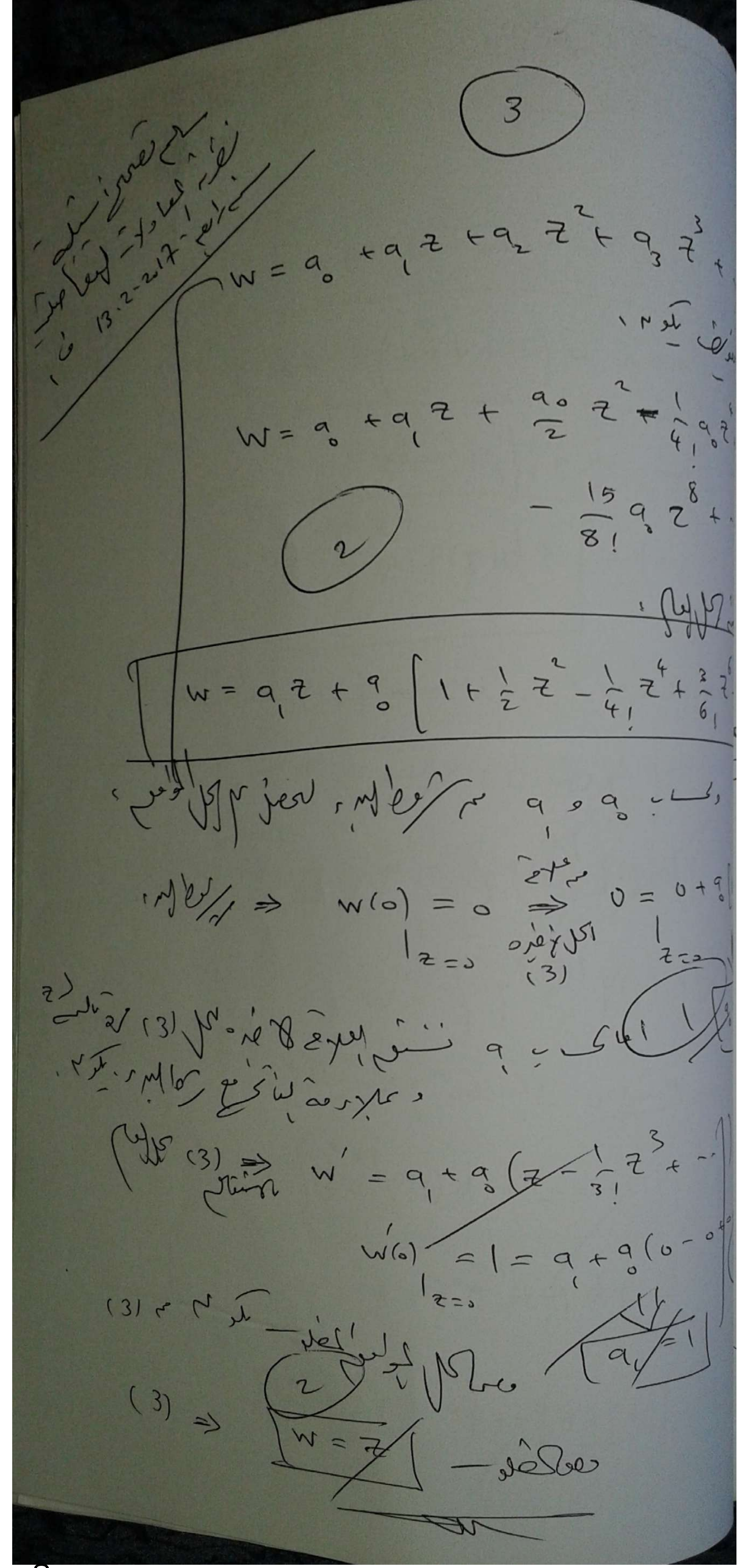
$$n=4 \Rightarrow \boxed{a_6 = \frac{3}{6!} a_0}$$

$$n=5 \Rightarrow \boxed{a_7 = 0}$$

$$n=6 \Rightarrow \boxed{a_8 = -\frac{15}{8!} a_0}$$

وهكذا

وبالتالي الحل العام [illegible] هو:



3
13.2.2017
$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$
$w = a_0 + a_1 z + \frac{a_0}{2} z^2 - \frac{1}{4!} a_0 z^4$
$- \frac{15}{8!} a_0 z^8 + \dots$
2
$w = a_1 z + a_0 \left[1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4!} z^4 + \frac{3}{6!} z^6 \right.$
$w(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + a_0$
(3)
1
$(3) \Rightarrow w' = a_1 + a_0 (z - \frac{1}{3!} z^3 + \dots$
$w'(0) = 1 = a_1 + a_0 (0 - 0 \dots$
$a_1 = 1$
(3)
2
$(3) \Rightarrow w = z$

سلم تصحيح أسئلة نظرية المعادلات التفاضلية
الامتحان الرابع 13.2.2017

4

ثالثاً: لإيجاد حل المعادلة التفاضلية:

$$zw'' + (a+b+z)w' + aw = 0 \quad (1)$$

حيث يكون الحل:

$$w = \int_C e^{z\xi} p(\xi)\, d\xi \quad --(2)$$

يتعين لدينا إيجاد وتعيين $p(\xi)$ والمسار C مفروض ما.

نشتق طرفي الحل المفروض (2) بالنسبة لـ z حيث نجد:

$(2) \Rightarrow$ لـ z

$$w' = \int_C \xi e^{z\xi} p(\xi)\, d\xi \quad (2)$$

$$w'' = \int \xi^2 e^{z\xi} p(\xi)\, d\xi \quad (2)$$

وبالتعويض في المعادلة المعطاة (1):

$$(1) \Rightarrow z\int_C \xi^2 e^{z\xi} p(\xi)\, d\xi + (a+b+z)\int_C \xi e^{z\xi} p(\xi)\, d\xi + a\int_C e^{z\xi} p(\xi)\, d\xi = 0$$

أو

$$\int_C e^{z\xi} p(\xi)\cdot\left[z\xi^2 + a\xi + b\xi + z\xi + a\right] d\xi = 0 \quad (2)$$

$$\int_C e^{z\zeta} p(\zeta)\left[z\,Q(\zeta) + R(\zeta)\right] d\zeta = 0 \quad \text{---} (3)$$

حيث لدينا هنا :

$$\left[\; Q(\zeta) = \zeta^2 + \zeta \;,\quad R(\zeta) = (a+b)\,\zeta + a \;\right]$$

(4)

ونذكر بالتكامل مشتقاً تاماً :

$$\frac{d}{d\zeta}\left[e^{z\zeta} s(\zeta)\right]$$

إذا كان . (إذا نشتقا إذا كان) :

$$s(\zeta) = (\zeta^2 + \zeta)\, p(\zeta) \quad \text{---} (أ)$$

$$s'(\zeta) = \left[(a+b)\,\zeta + a\right] \cdot p(\zeta) \quad \text{---} (ب)$$

(3)

ومن هذا نأخذ :

$$\frac{s'(\zeta)}{s(\zeta)} = \frac{(a+b)\,\zeta + a}{\zeta^2 + \zeta} = \frac{a}{\zeta} + \frac{b}{\zeta + 1} \quad \text{---} (4)$$

(1)

وذلك بعد توزيع الكسر للطرف الأيمن للطرف الأيسر (...)

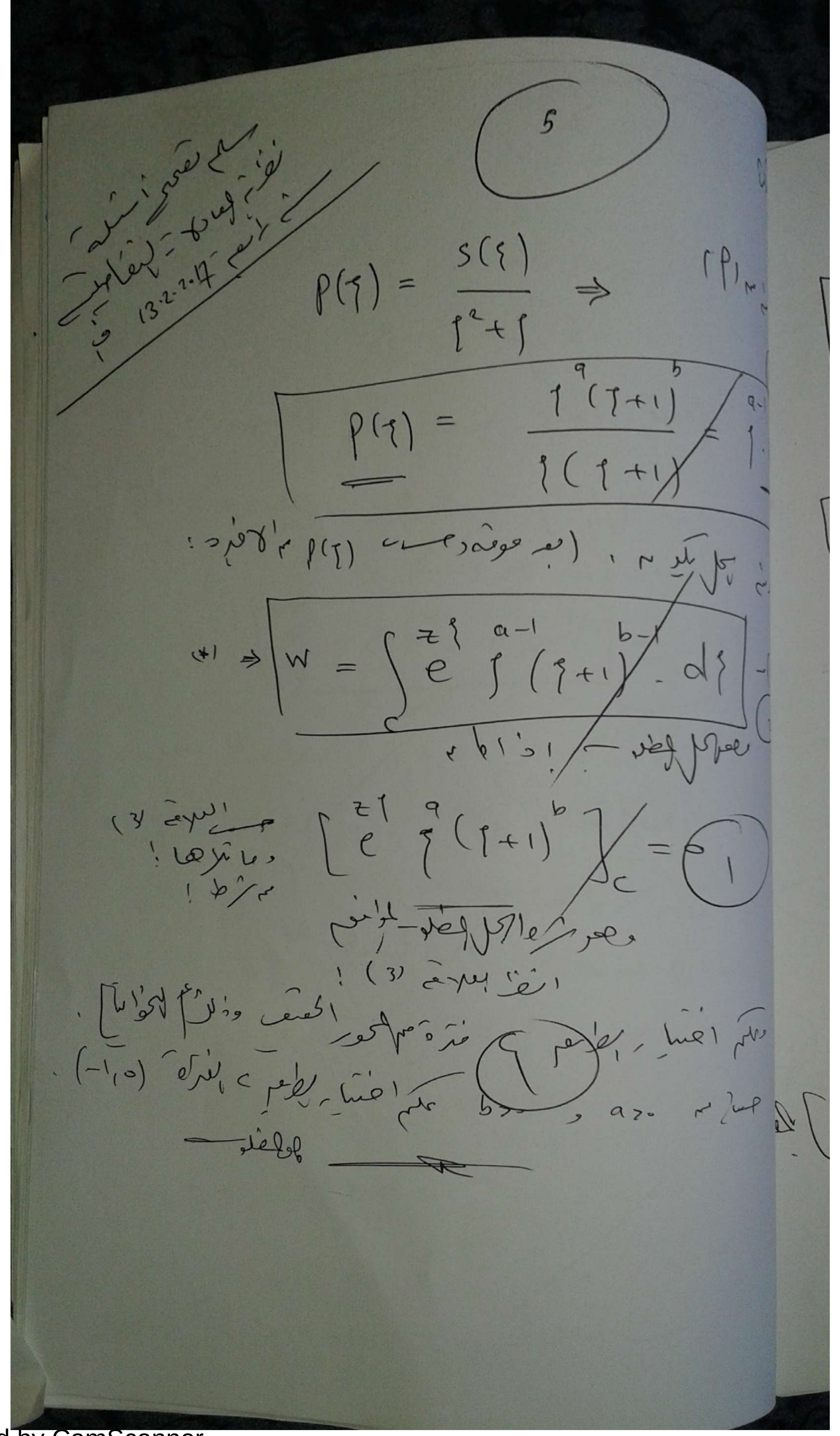
$$(4) \Rightarrow \ln s(\zeta) = a \ln \zeta + b \ln(\zeta + 1) \Rightarrow$$

$$\ln(s(\zeta)) = \ln \zeta^a \cdot (\zeta + 1)^b \Rightarrow$$

ومنه

$$\boxed{s(\zeta) = \zeta^a (\zeta + 1)^b}$$

(2)


5
13.2.2017
(1)
(-1,0)
a>0

سلم تقدير اسئلة
مقرر: المعادلات التفاضلية
مرحلة رابعة
13.2.2017

(6)

رابعاً: نستخرج دالة غرين للمسألة الحدية

$$y'' - y = f(x) \quad --(1)$$

حيث $y(x)$ محدود من أجل $x \in (-\infty, +\infty)$!

نكتب الحل العام لمعادلة المتجانسة المناظرة لمعادلة المعادلة (1) وهو الشكل :

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{+x}} \quad --(2)$$

(3)

نلاحظ ان الحل الخاص $y_1 = e^{x}$ محدود عندما $x \to -\infty$

(2)

وان الحل الخاص $y_2 = e^{-x}$ محدود عندما $x \to +\infty$

اي يحققان شرط الحدي المعطى. هنا تكون من الشكل.

ولذلك فدالة غرين للمسألة الحدية

(1)

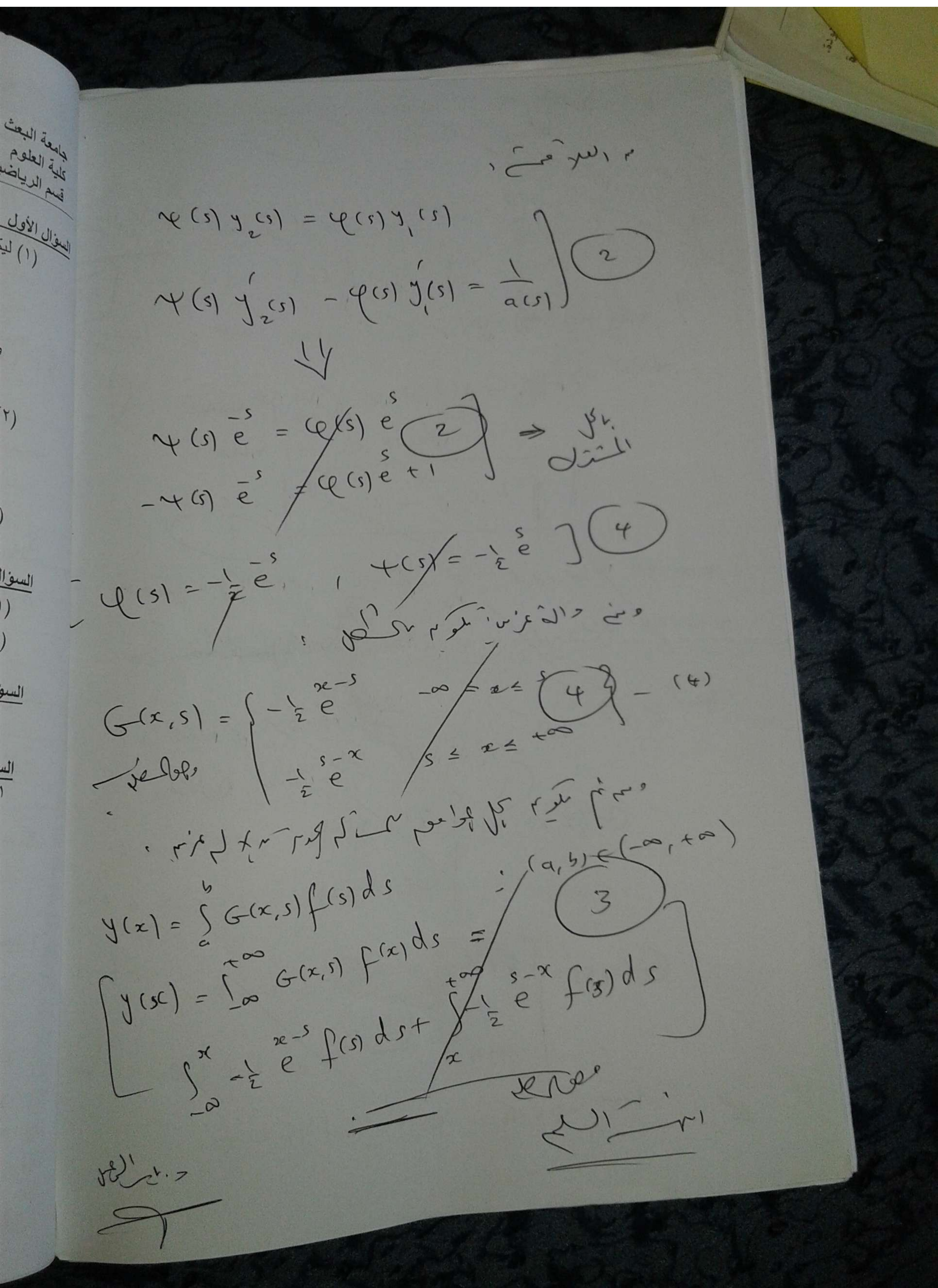
$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)\, y_1(x) & -\infty \le x \le s \\ \psi(s)\, y_2(x) & s \le x \le +\infty \end{cases}$$

ومنه

$$G(x,s) = \begin{cases} \varphi(s)\, e^{x} & -\infty \le x \le s \\ \psi(s)\, e^{-x} & s \le x \le +\infty \end{cases}$$

(4)

حيث ان الشيء $\varphi(s)$ ، $\psi(s)$ - نستخرجها من ،



$\psi(s) y_2(s) = \varphi(s) y_1(s)$

$\psi(s) y_2'(s) - \varphi(s) y_1'(s) = \frac{1}{a(s)}$ (2)

$\Downarrow$

$\psi(s) e^{-s} = \varphi(s) e^{s}$ (2) $\Rightarrow$ بالحل المشترك

$-\psi(s) e^{-s} = \varphi(s) e^{s} + 1$

$\varphi(s) = -\frac{1}{2} e^{-s}$, $\psi(s) = -\frac{1}{2} e^{s}$ (4)

ومنه دالة غرين تعطى بالشكل :

$$G(x,s) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{x-s} & -\infty \le x \le s \\ -\frac{1}{2} e^{s-x} & s \le x \le +\infty \end{cases}$$ (4) — (4)

والمطلوب

ومن ثم نكتب الحل العام من أجل أي f من علاقة غرين .

$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s) ds$; $(a,b) \in (-\infty,+\infty)$ (3)

$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s) f(x) ds = \int_{-\infty}^{x} -\frac{1}{2} e^{x-s} f(s) ds + \int_{x}^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{s-x} f(s) ds$

مع الحل

انتهى السلم